

Лабораторная работа № 7
«МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В БИОЛОГИИ.
РЕГУЛЯЦИЯ ЧИСЛЕННОСТИ ПОПУЛЯЦИИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ
ПЛОТНОСТИ»

В естественных условиях довольно редко встречаются случаи, когда на популяцию не воздействуют какие-либо факторы, ограничивающие ее рост (недостаток или избыток света, тепла, нехватка мест для гнездования и т.д.).

Системный фактор, ограничивающий рост популяции, ввел П.Ф. Ферхюльст в 1838 г. в уравнении логистического роста:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \quad (1)$$

где r – скорость прироста, K – предельная величина численности (емкость экологической ниши)

Это уравнение напоминает уравнение экспоненциального роста с добавлением в правой части еще одного члена, который учитывает ограниченность ресурсов, не позволяющую виду размножаться неограниченно. Величина K соответствует такой численности популяции, при которой скорость воспроизводства в результате конкуренции сильно снижена и количество родившихся особей уравнивается количеством погибших. Она определяется ограниченностью пищевых и территориальных ресурсов, климатическими и многими другими факторами, которые могут быть различными для разных видов. Другими словами, предельное значение K – это емкость экологической ниши популяции.

Уравнение Ферхлюста можно решить аналитически:

$$x(t) = \frac{x_0 K e^{rt}}{K - x_0 + x_0 e^{rt}} \quad (2)$$

где x_0 – начальная численность популяции

Пример логистической популяционной динамики в условной популяции при параметрах: x_0 – 10 особей, K – 1000 особей, r – 0,07 год⁻¹ можно отобразить графически в виде логистической кривой (рисунок 1).

В качестве учебного примера для расчета логистического роста популяции воспользуемся данными по численности полярных куропаток в заказнике.

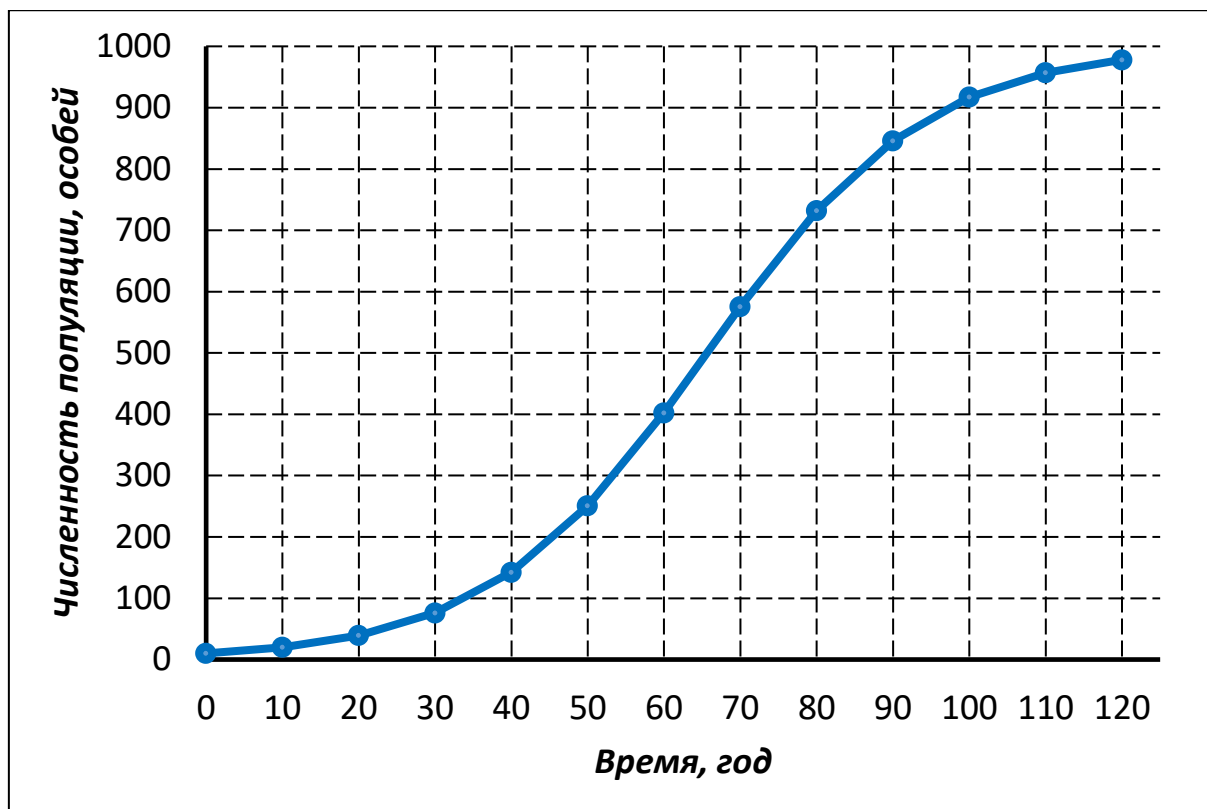


Рисунок 1 – Пример логистического роста популяции

Задание. В 1980 году в один из заказников Беларуси завезли 8 особей белой куропатки (*Lagopus lagopus*): двух самцов и шесть самок. За пять лет численность популяции белой куропатки достигла 1326 размножающихся особей (выросла в 166 раз!). При отслеживании ежегодной численности было выявлено, что по ряду признаков рост данной популяции шел по логистической кривой. Так, от первых восьми особей, завезенных в заказник в 1981 году численность популяции белой куропатки выросла до 32 особей, в 1982 году – до 81, в 1983 году – до 285, в 1984 году – до 640, в 1985 году – до 1196 и в 1986 году – до 1900 (таблица 1).

Таблица 1 – Численность белой куропатки в заказнике (1980–1986 гг.)

Время, год (t)	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
Численность особей (x)	8	32	81	285	640	1196	1900

Покажите, что в данной популяции белой куропатки наблюдается рост численности популяции, который зависит от ее плотности. Отобразите модель графически. Используя приведенные данные о росте численности популяции белой куропатки, найдите для этой популяции значение параметров логистического уравнения Ферхлюста: скорость прироста r и емкость экологической ниши K .

Решение:

Для решения **первой части задания** представим данные из таблицы 1 по численности куропатки в следующем виде – по оси абсцисс будет отложено время (t) в годах, а по оси ординат – $\ln(x)$, где x – численность популяции. Для этого предварительно необходимо рассчитать значения $\ln(x)$ и занести их в рабочую таблицу (таблица 2, рисунки 2 и 3). После этого по имеющимся данным легко строится график в любом из редакторов электронных таблиц (MS Excel или Libre Office Calc 7.6). Как строятся графики по данным рассматривалось ранее в предыдущей лабораторной работе. Единственное новшество – это продление линии тренда назад и вперед (опция «Прогноз») для большей наглядности модели. Сравните полученные графики с рисунками 4 и 5.

Таблица 2 – Рабочая таблица для расчета численности популяции белой куропатки в заказнике (1980–1986 гг.)

Время, год (t)	Численность особей (x)	$\ln(x)$	x'	$\frac{1}{x'} * \frac{\Delta x}{\Delta t}$	$\ln \frac{x}{K - x}$
1980	8	2,08			
1981	32	3,47			
1982	81	4,39			
1983	285	5,65			
1984	640	6,46			
1985	1196	7,09			
1986	1900	7,55			

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Год	t	xt	r	rt	ln(x)	x'	Δx/Δt	1/x' * Δx/Δt	ln(x/(K-x))
2	1980	0	8							
3	1981	1	32							
4	1982	2	81							
5	1983	3	285							
6	1984	4	640							
7	1985	5	1196							
8	1986	6	1900							

Рисунок 2 – Рабочая таблица в MS Excel 2019

для лабораторной_LO.xlsx — LibreOffice Calc

Файл Правка Вид Вставка Формат Стили Лист Данные Сервис Окно Справка

Arial 12 pt Ж К Ч A

D8 f_x Σ =

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Год	t	xt	r	rt	ln(x)	x'	$\Delta x/\Delta t$	$1/x' \cdot \Delta x/\Delta t$	$\ln(x/K-x)$
2	1980	0	8							
3	1981	1	32							
4	1982	2	81							
5	1983	3	285							
6	1984	4	640							
7	1985	5	1196							
8	1986	6	1900							

Рисунок 3 – Рабочая таблица в LO Calc 7.6

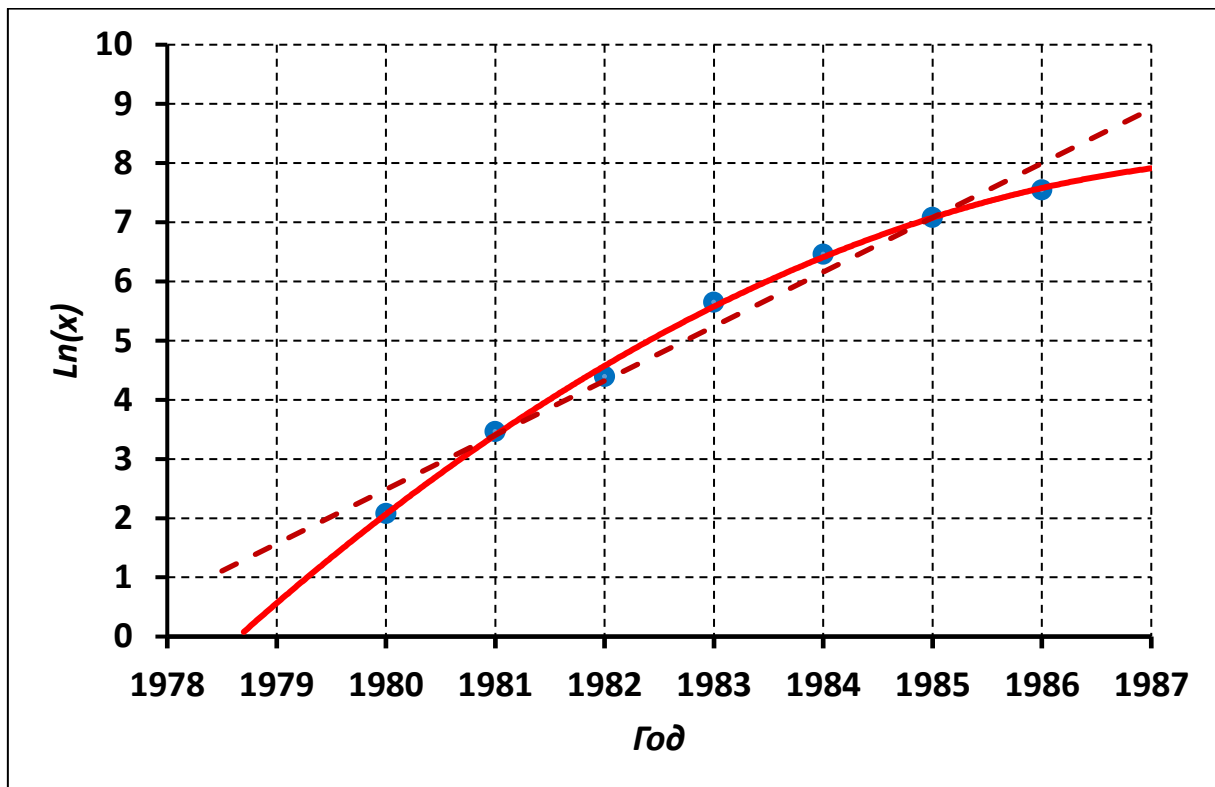


Рисунок 4 – График роста численности белой куропатки в заказнике, выполненный в MS Excel 2019

Обратите внимание на разницу между полиномиальной степенной линией тренда (изогнутой кривой) и линейной линией тренда в конце графика. Эта область и есть давлением среды на численность популяции, которое и не позволяет ей расти экспоненциально.

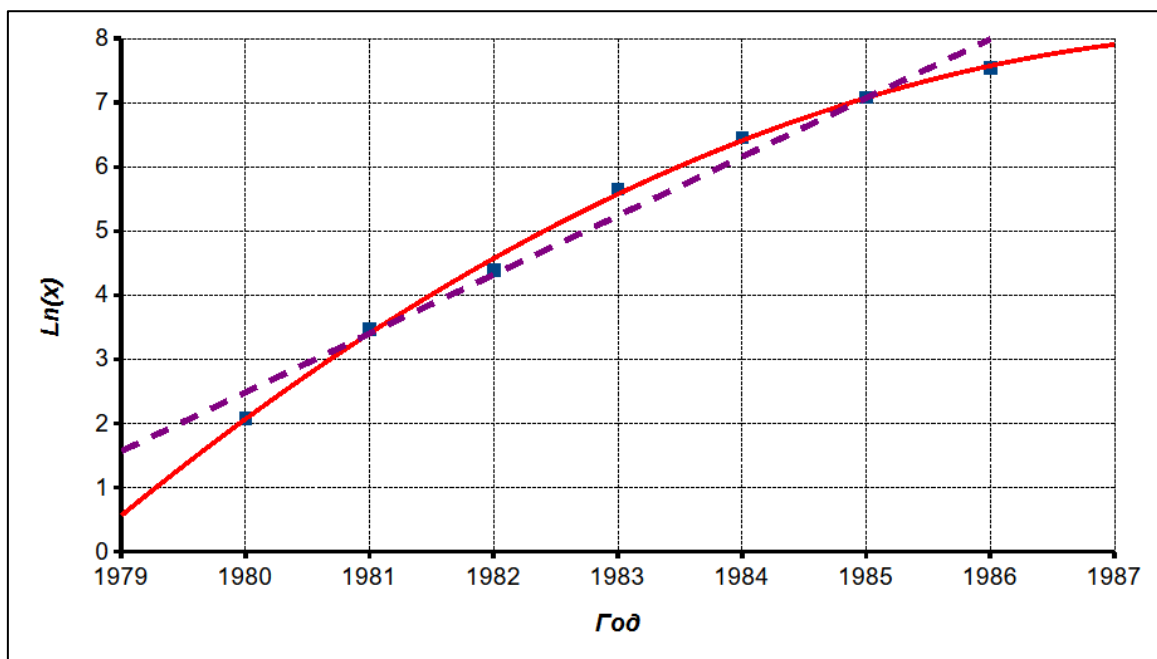


Рисунок 4 – График роста численности белой куропатки в заказнике, выполненный в LO Calc 7.6

Полученный график отражает плавное снижение роста численности популяции белой куропатки в заказнике. Это подтверждает предположение, что с дальнейшим увеличением плотности и давления факторов окружающей среды рост численности белой куропатки замедлится.

Решение **второй части задания** необходимо разбить на несколько этапов. На первом из них нужно использовать приближенное выражение, которое вытекает из формулы Ферхлюста (1):

$$\frac{1}{x'} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \approx r - \frac{r}{K} \cdot x' \quad (3)$$

где $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{t+1} - x_t}{t_{t+1} - t_t}$, а $x' = \frac{x_{t+1} + x_t}{2}$

Далее, используя выше приведенные формулы, рассчитаем промежуточные переменные $\frac{1}{x'} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}$ и x' в рабочей таблице. Действия по расчету в рабочей таблицы аналогичны как в MS Excel, так и в LO Calc. Получившиеся данные сверьте с таблицей 3. При расчетах обратите внимание, что в таблице x_t – это численность в соответствующий год (1980 – нулевой, т.е. год заселения, 1981 – первый, 1982 – второй и т.д.), а x_{t+1} – это численность в следующем году (т.е. если $x_t = 8$, то $x_{t+1} = 32$ и т.д.).

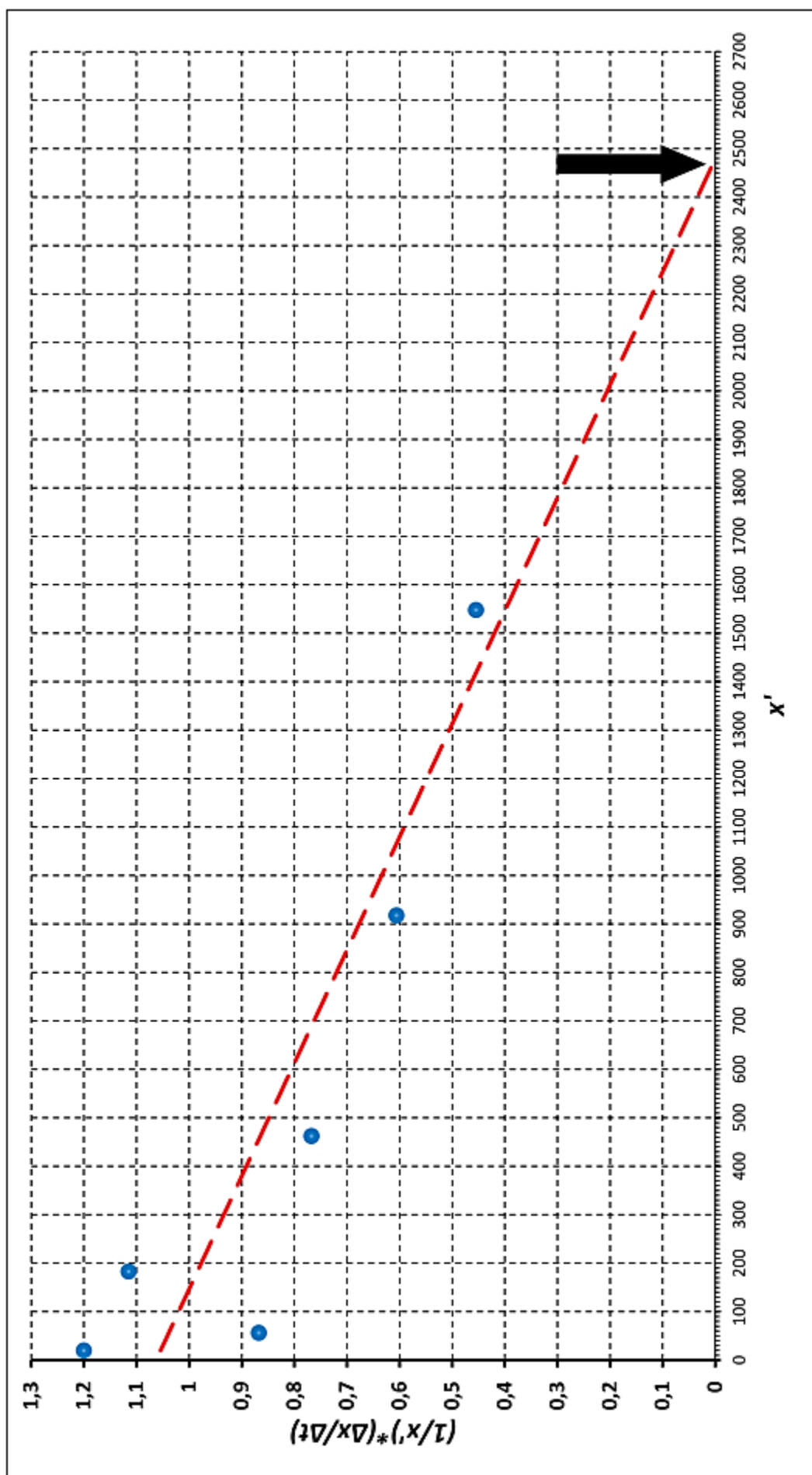


Рисунок 5 – Определение предельной численности белой куропатки в заповеднике

Таблица 3 – Параметры численности популяции белой куропатки в заказнике (1980–1986 гг.)

Время, год (t)	Численность особей (x)	ln(x)	x'	$\frac{1}{x'} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}$	$\ln \frac{x}{K-x}$
1980	8	2,08	20,0	1,20	-5,73
1981	32	3,47	56,5	0,87	-4,33
1982	81	4,39	183,0	1,11	-3,38
1983	285	5,65	462,5	0,77	-2,04
1984	640	6,46	918,0	0,61	-1,05
1985	1196	7,09	1548,0	0,45	-0,06
1986	1900	7,55	—	—	1,20

После расчета промежуточных переменных необходимо определить предел численности белой куропатки в заказнике, т.е. емкость среды – K . Для этого нужно построить линейный график, где на оси абсцисс будут отображены значения x' , а на оси ординат – $\frac{1}{x'} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}$ (рисунок 5).

Пересечение линии тренда графика с осью абсцисс и будет значением K . В нашем случае – это 2470 особей белой куропатки для данной площади (обозначено на графике черной стрелкой).

Зная значение параметра K можно легко определить и скорость ежегодного прироста r . Для этого остается в рабочей таблице рассчитать последний промежуточную переменную $\ln \frac{x}{K-x}$ и сверить полученные результаты с таблицей 3 и построить точечный график, где по линии абсцисс будет отложен год, а на оси ординат – значения $\ln \frac{x}{K-x}$ для каждого соответствующего года. Затем на графике необходимо добавить линию тренда (график линейный) и отобразить на графике уравнение функции (рисунки 6 и 7).

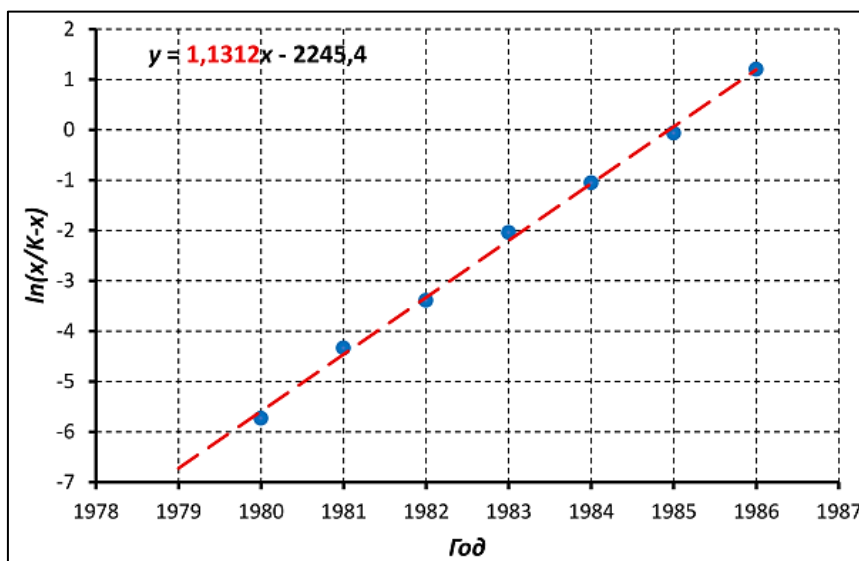


Рисунок 6 – Графическое определение скорости прироста белой куропатки в заказнике, выполненное в MS Excel 2019

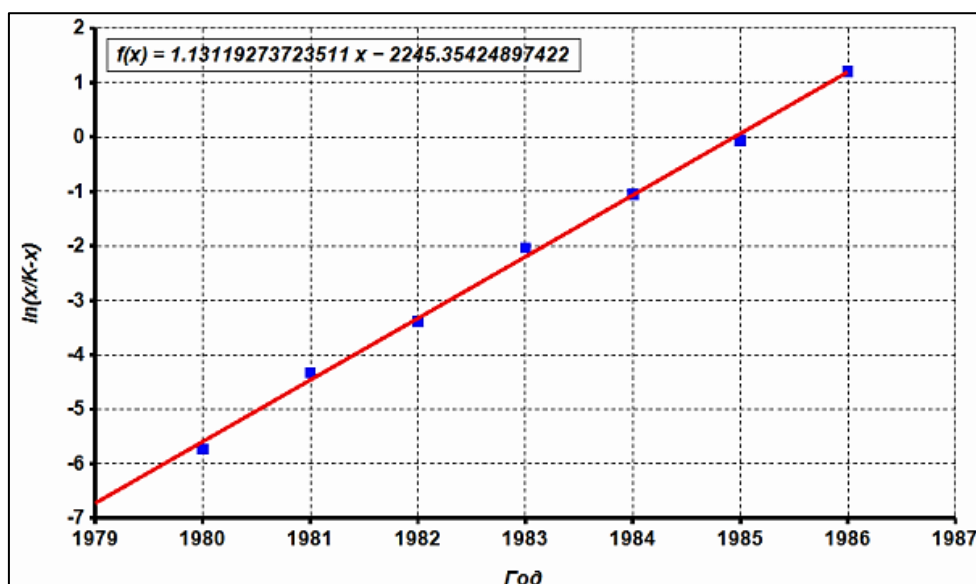


Рисунок 7 – Графическое определение скорости прироста белой куропатки в заказнике, выполненное в LO Calc 7.6

Это будет не что иное, как линейное уравнение $y = kx + b$, где значение коэффициента k , который определяет наклон графика и будет значение ежегодного прироста r . В нашем случае он будет составлять примерно 1,13.

Таким образом все поставленные вопросы решены.

Задания для самоконтроля

1) В леспромхозе на одном из участков велась добыча куницы. В течение 15 лет разведения охотоведами проводились наблюдения за численностью этого вида. Численность по годам представлена ниже в таблице 4. Определите кинетические показатели скорости прироста популяции и возможной предельной численности куницы в этом леспромхозе.

Таблица 4 – Численность куницы в леспромхозе

Время, год	Численность, особи	Время, год	Численность, особи
0	1120	8	1940
1	1147	9	2072
2	1189	10	2173
3	1253	11	2245
4	1346	12	2293
5	1470	13	2324
6	1620	14	2343
7	1784	15	2355

2) Размер популяции большой панды в одном из заповедников Китая начиная с 2004 года изменялся следующим образом: в 2004 году – 600 особей, в 2006 – 612, в 2008 – 641, в 2010 – 683, в 2012 – 694, в 2014 – 701, в 2016 – 108, в 2018 – 712, в 2020 – 716. Определите кинетические показатели скорости прироста популяции панды и возможной предельной численности этого охраняемого вида в заповеднике при сохранении в нем тех же площадей зарослей бамбука.

3) В заказнике «Средняя Припять» с 2000 по 2014 гг. были проведены учеты численности гнездящихся пар белого аиста:

Год	2000	2004	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Количество гнездящихся пар	182	178	169	172	175	190	205	212	218	218

Определите кинетические показатели скорости прироста популяции белого аиста и возможной предельной численности этого охраняемого вида в заказнике «Средняя Припять» при сохранении в нем тех же условий обитания.